19. Derived Fourier 級数ノ absolute summability (A) ニ就テ

佐藤徳意 (北大)

最近高橋龍夫氏ガ数物記事 3, Vol. 16, 7 (1934) ニテ The absolute summability (A) of the conjugate Fourier series ノ題ニテソレノ研究ヲ発表サレタ. 筆者ハ derived Fourier 級数ノ absolute summability (A) ノ判定條件ヲ求メル方法ニ觸レテミタイト思フ.

$f(\theta)$ ヲ Lebesgue ノ意味ニテ可積分ナ週期函数 (週期 $[-\pi,\pi]$) ノ Fourier 級数ヲ

$$(1)\qquad \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

トスルトキ

$$(2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos n\theta-a_n\sin n\theta)$$

ヲ (1) ノ conjugate Fourier 級数トヨビ

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\cos n\theta-a_n\sin n\theta)$$

ヲ (1) ノ derived Fourier 級数トヨブ.

コノ級数ノ absolute summability (A) ノ判定條件ヲ直接ソノ定義ヨリ求メルニハ Poisson ノ和ヲ作ラナケレバナラナイガ併シココデハ間接的デハアルガスデニ (2) ノ Poisson ノ和ガ求メラレテヰルノデアルカラソレヲ用ヒテ行カウトスルノデアル.

今

$$(4)\qquad P(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}(b_n\cos n\theta-a_n\sin n\theta)$$

$$(5)\qquad \mathcal{P}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n}(b_n\cos n\theta-a_n\sin n\theta)$$

トヲクトキハ(5)ハ收斂シテ次ノ如クナル(高橋氏或ハPrasadノ論文)

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{x\sin(\alpha-\theta)}{1-2x\cos(\alpha-\theta)+x^2}\,d\alpha$$

$\mathfrak{F}(x)$ハ $0\leqq x<1$ デ收斂ノ級数デアルカラコノ区間デ各点ニテ項別微分ガデキル。依ッテ(4)カラ

$$(b) \qquad \mathfrak{F}'(x) = P(x)$$

而シテ(3)ノ absolute summability (A) ヲ断定スルニハ

$$\int_0^{x_1}|P'(x)|\,dx \qquad 0<x_1<1$$

ガ有界ナルコトヲ示スヨイ。然ルニ(b)ニヨリ之ハ

$$\int_0^{x_1}|\mathfrak{F}''(x)|\,dx \qquad 0<x_1<1$$

ガ有界デアルコトヲ求メルニ帰スル。即チ

$$\int_0^{x_1}\left|\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}\,dt\right|dx<K,\quad 0<x_1<1$$

$$\psi(t)=f(\theta+t)-f(\theta-t)$$

K: const.

コノ考ヘハ conjugate derived Fourier 級数或ハ nth derived Fourier 級数ヘモソノママ持ッテ行ケル

次ニ判定條件ヲ一ツ求メテミル。

$$\int_0^{x_1}\left|\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}\,dt\right|dx$$

$$=\int_0^{x_1}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}\,dt\right|dx$$

積分ノ順序交換シテ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\psi(t)|\left\{\int_0^{x_1}\left|\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}\right|dx\right\}dt$$

トナル、今

$$\int_0^{x_1}\left|\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}\right|dx$$

ヲ考ヘル。 t_1 $\left(0<t_1<\frac{\pi}{2}\right)$ ヲ $t_1=\cos^{-1}\frac{x_1(3-x_1^2)}{2}$

トスレバ $0\leqq t\leqq t_1$ ニ於テハ

$$\int_0^{x_1}\left|\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}\right|dx$$

$$=\int_0^{x_1}\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}dx=\frac{(1-x_1^2)\sin t}{(1-2x_1\cos t+x_1^2)^2}-\sin t$$

$$\leqq\frac{(1+x_1)\sin t}{(1-x_1)^3}\leqq\frac{2\sin t}{\left\{\frac{3}{2}(1-\cos t_1)\right\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

$\leqq 6\sqrt{3}\,\frac{1}{t^2}$ $\left((1-x_1)^3>0,\ 0<x_1<1\right.$ デアルカラ $\left.2(1-\cos t_1)<3(1-x_1)^2\right)$

モシ t ガ $t_1<t\leqq\frac{\pi}{2}$ デアッテ x' ガ $0<x'<1$ デ且ツ次ノ方程式

$$\cos t=\frac{x(3-x^2)}{2}$$

ヨリキメラレルトキニハ

$$\int_0^{x_1}\left|\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}\right|dx$$

$$=\int_0^{1}\left|\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}\right|dx=\int_0^{x'}\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}dx$$

$$-\int_{x'}^{t}\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}dx$$

$$=2\,\frac{(1-x'^2)\sin t}{(1-2x'\cos t+x'^2)^2}-\sin t\leqq 2\,\frac{(1-x'^2)\sin t}{(1-x')^4}$$

$$\leqq 3\sqrt{3}\,\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\leqq 12\sqrt{3}\,\frac{1}{t^2}$$

$$\int_0^{x_1}\left|\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}dt\right|dx$$

$$=\int_0^{x_1}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}dt\right|dx$$

$$+\int_0^{x_1}\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\psi(t)\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}dt\right|dx$$

$\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ デハ $\dfrac{2(2\cos t-3x+x^3)}{(1-2x\cos t+x^2)^3}$ ガ有界デアルカラ積分ノ才二項ハ有界. 又才一項ハ先ノ計算ニヨリ

$$\int_0^{x_1}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}dt\right|dx$$

$$\leqq\left(\int_0^{t_1}+\int_{t_1}^{\frac{\pi}{2}}\right)|\psi(t)|\left\{\int_0^{x_1}\left|\frac{2(2\cos t-3x+x^3)\sin t}{(1-2x\cos t+x^2)^3}\right|dx\right\}dt$$

$$\leqq 18\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\psi(t)|}{t^2}dt$$

コレヨリ次ノ定理ヲ得.

定理　モシ積分

$$\int_0^{\delta}\frac{|\psi(t)|}{t^2}dt$$

ガ存在スルトキハ ~~divergent~~ derived Fourier 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\cos n\theta-a_n\sin n\theta)$$

ハ absolute summable (A) デアル.

(9. 8. 18 受取)